القسم : تحليل - رياضيات السنة : الرابعة ت+ج المادة : منطق رياضي المحاضرة : الحادية عشر

المحاكمات المنطقية :

تعريف المحاكمة المنطقية :
هي مجموعة منتهية من العبارات المنطقية تسمى المعطيات أو الفرضيات $p_1, \ldots, p_n$ بالإضافة إلى عبارة q تسمى النتيجة أو المحصلة وتمثل المحاكمة المنطقية كما يلي :

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{matrix}\right\} \text{(المعطيات)}$$

$\therefore\ q$ (النتيجة) .

أو :

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q \quad ---*$$

* تكون ~~العبارة المنطقية~~ المحاكمة المنطقية صحيحة إذا كانت العبارة الأخيرة * توتولوجي أي إذا توفر ~~الشرط التالي~~ :

كل p_i ; $(1 \leq i \leq n)$ صحيحة فإن النتيجة q صحيحة أيضاً أي عندها تكون العبارة *

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow q$$

استدلالاً أو توتولوجي .

ملاحظة :
أما إذا لم يتوفر هذا الشرط في أي محاكمة فإننا نقول أن المحاكمة غير صحيحة (باطلة) :
إذا كانت احدى المعطيات على الأقل خاطئة فإن المحاكمة تكون صحيحة مهما كانت قيمة الحقيقة لـ q .

مثال [1] -
اثبت أن المحاكمة التالية صحيحة:

إذا نال أحمد درجة 80 على الأقل في امتحان الجبر فإنه سيتخرج هذا العام وقد نال أحمد درجة 85 في امتحان الجبر إذا أحمد سيتخرج هذا العام:

الحل:
لتكن p هي نيل أحمد الدرجة 80 على الأقل.
q هي تخرج أحمد هذا العام.

المعطيات:

$$p \ , \ p \Rightarrow q$$

النتيجة:

$$q$$

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$$

p	q	$p \Rightarrow q$	الفرضيات $(p \Rightarrow q) \wedge p$	النتيجة q	المحاكمة
1	1	1	1 سطر الحرج	1 ✓	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

المحاكمة المنطقية صحيحة.

مثال (2) -
أثبت أن المحاكمة التالية صحيحة:

العدد الصحيح n هو إما عدد زوجي أو عدد فردي ولكن n ليس زوجياً إذاً : n هو عدد فردي.

الحل: ليكن: p هو عدد صحيح n هو عدد زوجي.
q العدد الصحيح n هو عدد فردي.

المعطيات: $\sim p$ و $p \vee q$
إذاً النتيجة: q

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$$(p \vee q) \wedge (\sim p) \Rightarrow q$$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge (\sim p)$	q
1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1 سطر حرج	1 ✓
0	0	0	1	0	0

المحاكمة المنطقية صحيحة.

مثال (3)
بين فيما إذا كانت المحاكمة التالية صحيحة أم خاطئة.
إذا كانت أسئلة الامتحان طويلة فإن الامتحان صعب ولكن الامتحان صعب
إذاً أسئلة الامتحان طويلة.

الحل :

ليكن p - اسئلة الامتحان طويلة .

q - الامتحان صعب .

المعطيات : q و $p \Rightarrow q$

النتيجة : p

$$\frac{\begin{matrix} p \Rightarrow q \\ q \end{matrix}}{\therefore p}$$

$$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$$

المعطيات :

p	q	p ⇒ q	(p ⇒ q) ∧ q	p	
1	1	1	1	1	✓
1	0	0	0	1	
0	1	1	1	0	X
0	0	1	0	0	

المحاكمة المنطقية خاطئة (باطلة) .

قواعد الاستنتاج :

نقدم فيما يلي بعض المحاكمات الاساسية الصحيحة التي تعتبر قواعد للاستنتاج وتفيد في تبسيط المحاكمات المنطقية وتسهل عملية التأكد من صحتها او خطئها .

1 - الجمع $\frac{p}{\therefore p \vee q}$ أو $p \Rightarrow p \vee q$

2 - قاعدة الاختصار

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

أو $\therefore q$

$p \wedge q \Rightarrow p$

أو q

3 -

$$\frac{\begin{array}{c} p \\ q \end{array}}{\therefore p \wedge q}$$

4 - الشرطيات :

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ p \end{array}}{\therefore q}$$

5 - :

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \sim q \end{array}}{\therefore \sim p}$$

6 -

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \end{array}}{\therefore p}$$

وكذلك

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim p \end{array}}{\therefore q}$$

(7) - مهم :

$$\frac{\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow s \end{array}}{\therefore p \Rightarrow s}$$

[8] هـ :

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \hline \therefore q \vee s \end{array}$$

مثال:
اثبت باستخدام قواعد الاستنتاج أثبت صحة المحاكمة المنطقية التالية.

$$\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \\ \sim C \\ B \Rightarrow \sim A \\ \hline \therefore \sim A \end{array}$$

الحل:

$$\left.\begin{array}{l} A \wedge (B \vee C) \\ \sim C \\ B \Rightarrow \sim A \end{array}\right] \overset{(2)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} B \vee C \\ \sim C \end{array}\right] \overset{(6)}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} B \\ B \Rightarrow \sim A \end{array}\right] \overset{(4)}{\Rightarrow} \sim A$$

$$\therefore \sim A$$

المحاكمة المنطقية صحيحة تأكد من هذا الحل باستخدام جدول الحقيقة معيناً الأسطر الحرجة:

(الجدول في الصفحة التالية).

A	B	C	$B\vee C$	$A\wedge(B\vee C)$	$\sim C$	$B\Rightarrow\sim A$	$\sim A$	المحاكمة
1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1

المحاكمة صحيحة ولا يوجد أسطر حرجة.

مثال:

باستخدام قواعد الاستنتاج أثبت صحة المحاكمة المنطقية التالية.

$$p\vee q\Rightarrow s$$
$$s\Rightarrow r$$
$$\sim(r\vee q)$$
$$\therefore \sim p$$

قيمة الحقيقة: $2^4=16$

الحل:

$\left.\begin{matrix} p\vee q\Rightarrow s \\ s\Rightarrow r\end{matrix}\right] \overset{\text{ق (7)}}{\Longrightarrow} p\vee q\Rightarrow r$

$\sim(r\vee q)$ — $\sim(r\vee q)=\sim r\wedge\sim q$

$\left.\begin{matrix} p\vee q\Rightarrow r \\ \sim(r\vee q)=\sim r\wedge\sim q\end{matrix}\right] \overset{\text{ق (2)}}{\Longrightarrow} \left.\begin{matrix} p\vee q\Rightarrow r \\ \sim r\end{matrix}\right] \overset{\text{ق (5)}}{\Longrightarrow} \sim(p\vee q)=\sim p\wedge\sim q$

$\therefore \sim p$

$\left.\sim(p\vee q)=\sim p\wedge\sim q\right] \overset{\text{ق (2)}}{\Longrightarrow} \sim p$

المحاكمة المنطقية صحيحة تأكد من ذلك باستخدام جدول الحقيقة مع الإشارة إلى الأسطر الحرجة إن وجدت .

مثال :

اثبت أن المحاكمة التالية صحيحة :

إذا رشح النائب نفسه لرئاسة المجلس فإنه سينتخب .

وإذا حضر النائب الاجتماع فإنه سيرشح نفسه لرئاسة المجلس .

إما أن يحضر النائب الاجتماع أو انه سيسافر إلى أوروبا .

ولكن النائب لا يمكن أن يسافر إلى أوروبا .

إذاً النائب سينتخب رئيساً للمجلس .

الحل :

p - ترشيح النائب نفسه إلى رئاسة المجلس .

q - ينتخب النائب رئيساً للمجلس .

r - حضور الاجتماع .

s - السفر إلى أوروبا .

المعطيات : $p \Rightarrow q$ و $r \Rightarrow p$, $r \vee s$, $\sim s$

النتيجة : q

$$
\begin{array}{l}
p \Rightarrow q \\
r \Rightarrow p \\
r \vee s \\
\sim s \\
\hline
\therefore q
\end{array}
$$

باستخدام قواعد الاستنتاج :

$$\left.\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow p \end{array}\right] \xRightarrow{\text{قب } 7} r \Rightarrow q$$

$$\left.\begin{array}{l} r \vee s \\ \sim s \end{array}\right] \xRightarrow{\text{قب } 6} r$$

$$\left.\begin{array}{l} r \Rightarrow q \\ r \end{array}\right] \xRightarrow{\text{قب } 4} q$$

$\therefore q$

مثال:

باستخدام جدول الحقيقة بين فيما إذا كانت المحاكمة المنطقية أم لا مع الإشارة الى الأسطر الحرجة:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ q \rightarrow r \\ p \rightarrow s \\ \sim s \\ \hline \therefore r \end{array}$$

الجدول في الصفحة التالية:

				①	②	③	④		النتيجة
p	q	r	s	p∨q	q→r	p→s	∼s	1∧2∧3∧4	r
1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1 ✓
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	1	0	0

المحاكمة صحيحة :

النتيجة المحاكمة صحيحة